

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error
BRKC	1/500	1/40	1.708301×10^{-2}	1.008468×10^{-2}
	1/500	1/50	9.762816×10^{-3}	5.012535×10^{-3}
	1/500	1/60	6.028822×10^{-3}	2.822963×10^{-3}
	1/500	1/70	3.989709×10^{-3}	1.738832×10^{-3}
	1/500	1/80	2.793234×10^{-3}	1.191840×10^{-3}
			$\alpha = 2.6181$	$\alpha = 3.0979$
			$C_\alpha = 270.4686$	$C_\alpha = 919.3184$
FRKC	1/500	1/40	3.280644×10^{-2}	1.560330×10^{-2}
	1/500	1/50	2.993149×10^{-2}	1.335517×10^{-2}
	1/500	1/60	2.290385×10^{-2}	1.005026×10^{-2}
	1/500	1/70	1.415099×10^{-2}	6.052967×10^{-3}
	1/500	1/80	5.040757×10^{-3}	2.071540×10^{-3}
			$\alpha = 2.4812$	$\alpha = 2.6757$
			$C_\alpha = 418.3782$	$C_\alpha = 405.2484$
BE-ELLAM	1/500	1/40	1.727842×10^{-2}	1.019763×10^{-2}
	1/500	1/50	1.004383×10^{-2}	5.125955×10^{-3}
	1/500	1/60	6.370859×10^{-3}	2.974945×10^{-3}
	1/500	1/70	4.375513×10^{-3}	1.910709×10^{-3}
	1/500	1/80	3.212402×10^{-3}	1.356822×10^{-3}
			$\alpha = 2.4374$	$\alpha = 2.9236$
			$C_\alpha = 138.478$	$C_\alpha = 481.5463$

Table 1: Order of convergence in space with $V(x, t) = 1 + 0.1x$

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error
BRKC	1/6	1/700	5.653338×10^{-3}	2.079667×10^{-3}
	1/8	1/700	3.189920×10^{-3}	1.225680×10^{-3}
	1/10	1/700	2.066911×10^{-3}	8.268313×10^{-4}
	1/12	1/700	1.460440×10^{-3}	5.999894×10^{-4}
	1/14	1/700	1.094716×10^{-3}	4.562014×10^{-4}
			$\beta = 1.9385$	$\beta = 1.7867$
			$C_\beta = 0.1808$	$C_\beta = 0.0508$
FRKC	1/6	1/700	5.920335×10^{-3}	2.503178×10^{-3}
	1/8	1/700	3.310857×10^{-3}	1.400726×10^{-3}
	1/10	1/700	2.117405×10^{-3}	8.985797×10^{-4}
	1/12	1/700	1.467171×10^{-3}	6.138583×10^{-4}
	1/14	1/700	1.075166×10^{-3}	4.520550×10^{-4}
			$\beta = 2.0123$	$\beta = 2.0222$
			$C_\beta = 0.2177$	$C_\beta = 0.0939$
BE-ELLAM	1/6	1/700	6.476122×10^{-2}	2.883357×10^{-2}
	1/8	1/700	4.817777×10^{-2}	2.151369×10^{-2}
	1/10	1/700	3.836627×10^{-2}	1.716823×10^{-2}
	1/12	1/700	3.187941×10^{-2}	1.428786×10^{-2}
	1/14	1/700	2.727120×10^{-2}	1.223664×10^{-2}
			$\beta = 1.0207$	$\beta = 1.0115$
			$C_\beta = 0.4028$	$C_\beta = 0.1764$

Table 2: Order of convergence in time with $V(x, t) = 1 + 0.1x$

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error
BRKC	1/500	1/60	6.117323×10^{-3}	2.475200×10^{-3}
	1/500	1/70	3.495166×10^{-3}	1.323890×10^{-3}
	1/500	1/80	2.429728×10^{-3}	9.213634×10^{-4}
	1/500	1/90	1.847878×10^{-3}	6.923624×10^{-4}
	1/500	1/100	1.408213×10^{-3}	5.172978×10^{-4}
			$\alpha = 2.8265$	$\alpha = 2.9903$
			$C_\alpha = 610.3031$	$C_\alpha = 475.0919$
FRKC	1/500	1/60	1.159784×10^{-2}	5.085293×10^{-3}
	1/500	1/70	8.458101×10^{-3}	3.559665×10^{-3}
	1/500	1/80	5.902566×10^{-3}	2.528298×10^{-3}
	1/500	1/90	3.967780×10^{-3}	1.713444×10^{-3}
	1/500	1/100	3.488353×10^{-3}	1.511827×10^{-3}
			$\alpha = 2.4833$	$\alpha = 2.4856$
			$C_\alpha = 308.5422$	$C_\alpha = 134.2145$
BE-ELLAM	1/500	1/60	6.673372×10^{-3}	2.733189×10^{-3}
	1/500	1/70	4.124203×10^{-3}	1.573640×10^{-3}
	1/500	1/80	3.124454×10^{-3}	1.199037×10^{-3}
	1/500	1/90	2.606328×10^{-3}	9.991517×10^{-4}
	1/500	1/100	2.240822×10^{-3}	8.839847×10^{-4}
			$\alpha = 2.1018$	$\alpha = 2.1665$
			$C_\alpha = 33.5250$	$C_\alpha = 17.3620$

Table 3: Order of convergence in space with $V(x, t) = 1 - 0.5x$

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error
BRKC	1/6	1/700	3.971642×10^{-2}	1.457259×10^{-2}
	1/8	1/700	2.157900×10^{-2}	8.290132×10^{-3}
	1/10	1/700	1.387359×10^{-2}	5.448085×10^{-3}
	1/12	1/700	9.796209×10^{-3}	3.888443×10^{-3}
	1/14	1/700	7.347346×10^{-3}	2.936484×10^{-3}
			$\beta = 1.9897$	$\beta = 1.8896$
			$C_\beta = 1.3770$	$C_\beta = 0.4261$
FRKC	1/6	1/700	3.866812×10^{-2}	1.336697×10^{-2}
	1/8	1/700	2.044585×10^{-2}	7.224535×10^{-3}
	1/10	1/700	1.276627×10^{-2}	4.564537×10^{-3}
	1/12	1/700	8.764417×10^{-3}	3.148085×10^{-3}
	1/14	1/700	6.401563×10^{-3}	2.313990×10^{-3}
			$\beta = 2.1208$	$\beta = 2.0692$
			$C_\beta = 1.7050$	$C_\beta = 0.5394$
BE-ELLAM	1/6	1/700	1.267779×10^{-1}	5.017525×10^{-2}
	1/8	1/700	9.377586×10^{-2}	3.749495×10^{-2}
	1/10	1/700	7.465792×10^{-2}	3.004816×10^{-2}
	1/12	1/700	6.210892×10^{-2}	2.512159×10^{-2}
	1/14	1/700	5.320968×10^{-2}	2.160284×10^{-2}
			$\beta = 1.0242$	$\beta = 0.9941$
			$C_\beta = 0.7916$	$C_\beta = 0.2971$

Table 4: Order of convergence in time with $V(x, t) = 1 - 0.5x$

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error	CPU	Fig.
BRKC	1/5	1/60	8.370973×10^{-03}	3.151613×10^{-03}	1.2	-
	1/10	1/60	2.581547×10^{-03}	9.348955×10^{-04}	2.1	I.1
FRKC	1/5	1/60	8.426960×10^{-03}	3.571262×10^{-03}	0.7	-
	1/10	1/60	2.628836×10^{-03}	1.039830×10^{-03}	1.1	I.1

Table 5: Results for BRKC & FRKC. CPU is in seconds.

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error	CPU	Fig.
GAL	1/69	1/60	6.315931×10^{-2}	3.769911×10^{-2}	17.9	I.2a
	1/200	1/60	1.384596×10^{-2}	6.736512×10^{-3}	51.8	I.2b
	1/300	1/60	8.437177×10^{-3}	4.054622×10^{-3}	77.6	-
	1/115	1/100	3.011717×10^{-2}	1.449988×10^{-2}	49.7	-
	1/200	1/100	1.159494×10^{-2}	5.076671×10^{-3}	86.5	-
	1/300	1/100	5.493178×10^{-3}	2.319413×10^{-3}	129.2	I.2c
QPG	1/69	1/60	5.042626×10^{-2}	2.597113×10^{-2}	17.9	I.2a
	1/200	1/60	2.384423×10^{-2}	1.121906×10^{-2}	51.9	I.2b
	1/300	1/60	2.596181×10^{-2}	1.225615×10^{-2}	77.7	-
	1/115	1/100	2.564857×10^{-2}	1.212395×10^{-2}	49.8	-
	1/200	1/100	9.187296×10^{-3}	4.064321×10^{-3}	86.5	-
	1/300	1/100	6.861496×10^{-3}	2.966565×10^{-3}	129.3	I.2c
CPG	1/69	1/60	1.502762×10^{-2}	6.299219×10^{-3}	18.0	I.2a
	1/200	1/60	4.935717×10^{-3}	2.350595×10^{-3}	51.9	I.2b
	1/300	1/60	4.589138×10^{-3}	2.242219×10^{-3}	77.8	-
	1/115	1/100	5.494951×10^{-3}	2.272993×10^{-3}	50.0	-
	1/200	1/100	1.897574×10^{-3}	7.277279×10^{-4}	86.3	-
	1/300	1/100	1.080232×10^{-3}	4.393256×10^{-4}	129.3	I.2c

Table 6: Results for GAL, QPG, & CPG. CPU time is in seconds.

C	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error	CPU	Fig.
1.0	1/60	1/60	1.123311×10^{-1}	6.024287×10^{-2}	68.7	I.3a
	1/120	1/60	8.824366×10^{-2}	4.589660×10^{-2}	134.3	-
	1/180	1/60	7.944206×10^{-2}	4.087597×10^{-2}	197.9	-
	1/60	1/120	8.795492×10^{-2}	4.613883×10^{-2}	141.7	-
	1/120	1/120	5.112340×10^{-2}	2.561269×10^{-2}	269.1	I.3b
	1/180	1/120	3.812530×10^{-2}	1.867242×10^{-2}	402.1	I.3c
0.1	1/60	1/60	5.241310×10^{-2}	2.723927×10^{-2}	68.6	I.3a
	1/120	1/60	3.184598×10^{-2}	1.581704×10^{-2}	133.6	-
	1/180	1/60	2.554619×10^{-2}	1.238932×10^{-2}	198.2	-
	1/60	1/120	3.683633×10^{-2}	1.838774×10^{-2}	140.4	-
	1/120	1/120	1.514924×10^{-2}	6.961759×10^{-3}	270.4	I.3b
	1/180	1/120	9.512487×10^{-3}	4.181123×10^{-3}	402.6	I.3c
0.0001	1/60	1/60	3.279756×10^{-2}	1.715544×10^{-2}	69.1	I.3a
	1/120	1/60	1.623756×10^{-2}	8.350265×10^{-3}	140.4	-
	1/180	1/60	1.156853×10^{-2}	5.913949×10^{-3}	201.2	-
	1/60	1/120	2.310494×10^{-2}	1.108312×10^{-2}	149.7	-
	1/120	1/120	7.797575×10^{-3}	3.349920×10^{-3}	284.2	I.3b
	1/180	1/120	4.380929×10^{-3}	1.731336×10^{-3}	412.4	I.3c

Table 7: Results for SDM with $C=1, 0.1,$ & $0.0001,$ CPU is in seconds.

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error	CPU	Fig.
CGM	1/60	1/60	4.574094×10^{-2}	2.216362×10^{-2}	13.9	I.4a
	1/120	1/60	3.136981×10^{-2}	1.399978×10^{-2}	27.7	-
	1/180	1/60	2.674044×10^{-2}	1.150175×10^{-2}	41.5	-
	1/60	1/120	2.501450×10^{-2}	1.191302×10^{-2}	28.4	-
	1/120	1/120	1.025814×10^{-2}	4.547582×10^{-3}	55.3	-
	1/180	1/120	6.763004×10^{-3}	2.919515×10^{-3}	85.1	I.4b
	1/60	1/180	1.956744×10^{-2}	9.230535×10^{-3}	41.5	-
	1/120	1/180	6.110354×10^{-3}	2.687964×10^{-3}	82.9	-
	1/180	1/180	3.381005×10^{-3}	1.457474×10^{-3}	124.3	I.4c
CGM	1/60	1/60	3.418172×10^{-2}	1.749322×10^{-2}	18.1	I.4a
	1/120	1/60	2.197196×10^{-2}	1.051318×10^{-2}	36.2	-
	1/180	1/60	1.810357×10^{-2}	8.461050×10^{-3}	54.3	-
	1/60	1/120	2.206570×10^{-2}	1.083687×10^{-2}	36.2	-
	1/120	1/120	9.206862×10^{-3}	4.198669×10^{-3}	72.3	-
	1/180	1/120	6.763004×10^{-3}	2.727802×10^{-3}	85.1	I.4b
	1/60	1/180	1.855220×10^{-2}	8.954882×10^{-3}	54.3	-
	1/120	1/180	6.062851×10^{-3}	2.722088×10^{-3}	108.5	-
	1/180	1/180	3.502214×10^{-3}	1.536899×10^{-3}	162.7	I.4c

Table 8: Results for CGM & DGM, CPU is in seconds.

Method	Δt	Δx	L_2 Error	L_1 Error	CPU	Fig.
MUSCL	1/69	1/60	5.131587×10^{-2}	1.870076×10^{-2}	0.9	I.5a
	1/115	1/100	3.019053×10^{-2}	1.019578×10^{-2}	2.6	I.5b
	1/300	1/100	2.737727×10^{-2}	1.161478×10^{-2}	6.1	-
	1/229	1/200	1.327108×10^{-2}	4.449515×10^{-3}	9.4	-
	1/300	1/200	1.203944×10^{-2}	4.042067×10^{-3}	12.4	-
	1/343	1/300	7.094933×10^{-3}	2.403457×10^{-3}	21.6	-
	1/400	1/300	6.580204×10^{-3}	2.243087×10^{-3}	24.8	-
	1/500	1/300	5.879445×10^{-3}	1.997493×10^{-3}	30.8	I.5c
	1/700	1/400	3.108750×10^{-3}	1.169307×10^{-3}	58.2	-
ENO	1/69	1/60	5.096013×10^{-2}	1.966867×10^{-2}	0.9	I.5a
	1/115	1/100	3.042145×10^{-2}	9.933304×10^{-3}	2.6	I.5b
	1/300	1/100	4.772205×10^{-2}	2.364377×10^{-2}	6.6	-
	1/229	1/200	1.667658×10^{-2}	6.502723×10^{-3}	10.1	-
	1/300	1/200	1.386139×10^{-2}	5.156693×10^{-3}	13.2	-
	1/343	1/300	1.343450×10^{-2}	5.318024×10^{-3}	22.5	-
	1/400	1/300	1.251113×10^{-2}	4.970423×10^{-3}	27.1	-
	1/500	1/300	1.094915×10^{-2}	4.439829×10^{-3}	32.7	I.5c
	1/700	1/400	1.090687×10^{-2}	4.150278×10^{-3}	61.7	-

Table 9: Results for MUSCL & ENO, CPU is in seconds.